Лекция 2. Комплекс сандар өрісі

Жоспар:

1. Комплекс санның геометриялық мағынасы
2. Тригонометриялық және көрсеткіштік түрі
3. Комплекс санды дәрежеге шығару
4. Мысалдар

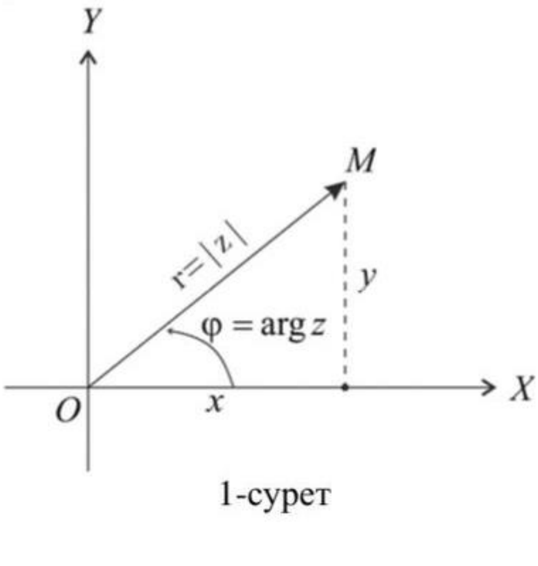
Комплекс сандардың геометриялық мағынасын көрсету үшін, жазықтықта декарттық координаталар жүйесін алып, жазықтықтың әрбір $M(x, y)$ нүктесіне $z = x + iy$ комплекс санын сәйкес қоямыз. Сонда барлық комплекс сандар жиыны мен жазықтық нүктелері жиынының арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатылады. Бұл сәйкестікте комплекс санның нақты бөлігіне абцисса осінің нүктелер жиыны, жорамал бөлігіне ордината осінің нүктелер жиыны сәйкестендіріледі. Сондықтан абцисса осін нақты ось, ал ординаталар осін жорамал ось деп атаймыз.

Анықтама. Әр нүктесіне бір комплекс сан сәйкестендірілген жазықтықты *комплекс жазықтық* дейміз.

Әрбір $z = x + iy$ комплекс санына бір $\overrightarrow{OM}$ векторын сәйкес қоямыз. Осы вектордың ұзындығын z комплекс санының *модулі* деп атаймыз және былай белгілейміз: $|z| = r$, $\overrightarrow{OM}$ векторының Ox осінің оң бағытымен жасайтын бұрышын z санының *аргументі* деп атаймыз және былай белгілейміз: $Arg\, z$ (мұнда $z \neq 0$). Бұл аргумент $2\pi k$ – ға дейінгі дәлдікпен анықталады $(k - 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Аргументтің $-\pi < \varphi \leq \pi$ шартын қанағаттандыратын бір ғана мәні болады. Ол мәнді аргументтің бас мәні деп атап, $\varphi = \arg z$ арқылы белгілейді, демек, $Arg\, z = \arg z + 2k\pi$.

1-суреттен:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{2.1}$$



1-сурет

екені көрініп тұр.

Олай болса $z = x + iy$ комплекс санын былай жазуға болады:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (2.2)$$

және бұл өрнекті комплекс санның *тригонометриялық түрі* деп атайды.

(2.1) – жүйенің шешімдері былай анықталатынына көз жеткізу қиын емес:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2.3)$$

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & егер \quad x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & егер \quad x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & егер \quad x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & егер \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & егер \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Жоғары алгебра курсынан Эйлер формуласы деп аталатын

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (2.5)$$

теңдігі белгілі. Сондықтан (2.2) – теңдікті

$$z = re^{i\varphi} \qquad (2.6)$$

түрінде жазуға болады және оны комплекс санның *көрсеткіштік түрі* деп атайды.

Сонымен комплекс санды үш түрде жазуға болатынын көрдік.

Жоғарыда алгебралық түрде берілген комплекс сандарға амалдар қолдануды көрсеттік.

Енді $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ комплекс сандары тригонометриялық түрде берілсін. Онда

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

теңдігі орындалады. Демек, комплекс сандарды көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі, ал аргументтері қосылады. Тура осылай

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (2.8)$$

теңдігінің орындалатынына көз жеткізу қиын емес.

Олай болса $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$Arg\,(z_1 \cdot z_2) = Arg\,z_1 + Arg\,z_2 + 2k\pi, \qquad (2.9)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\,z_1 - Arg\,z_2 + 2k\pi. \qquad (2.10)$$

Егер $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс санын өзіне-өзін n рет көбейтсек, онда математикалық индукция әдісімен келесі формуланың шығатынын көрсетуге болады:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (2.11)$$

демек, $|z^n| = |z|^n$, $Arg\, z^n = n\, Arg\, z$,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (2.12)$$

соңғы формуланы *Муавр формуласы* деп атайды.

Егер z_1 және z_2 сандарын көрсеткіштік түрде жазсақ, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, онда (2.7), (2.8) және (2.11)- формулалардан келесі теңдіктердің орындалатынын көруге болады:

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

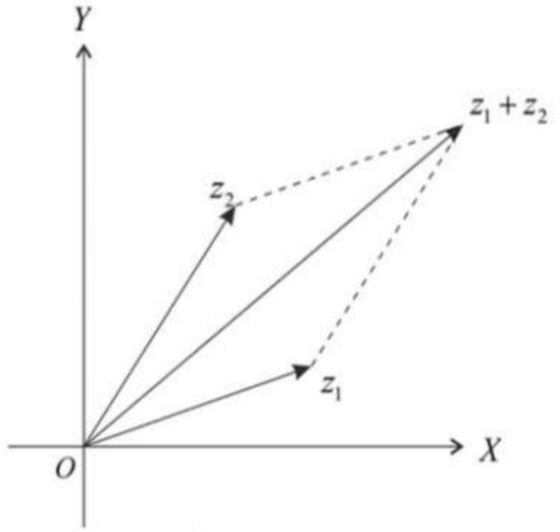
$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi},$$

(2.5) – Эйлер формуласын ескерсек, онда

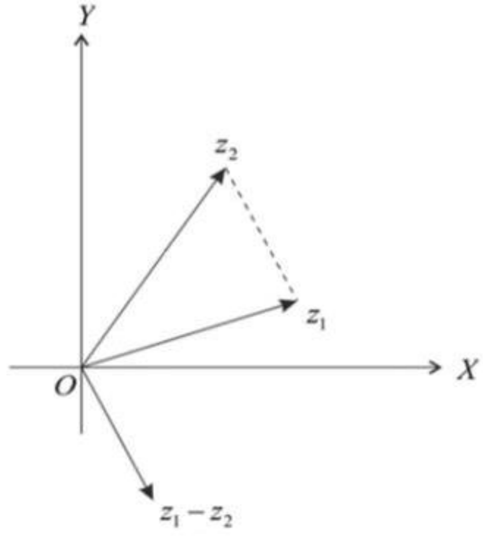
$$e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi} \qquad (2.13)$$

теңдігі орындалатынын байқау қиын емес.

Геометриялық тұрғыдан қарастырсақ, онда z_1 және z_2 комплекс сандарын қосу және алу дегеніміз, сәйкес векторларды қосу және алу болып табылады (2, 3-сурет)



2-сурет



3-сурет

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$$

$z = x + iy$ комплекс санына түйіндес $\bar{z} = x - iy$ комплекс санының геометриялық мағынасы, Ox осінен қарағанда симметриялы вектор (4-сурет)

Қасиеттері:

1) $|z| = |\bar{z}|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$;

2) $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$;

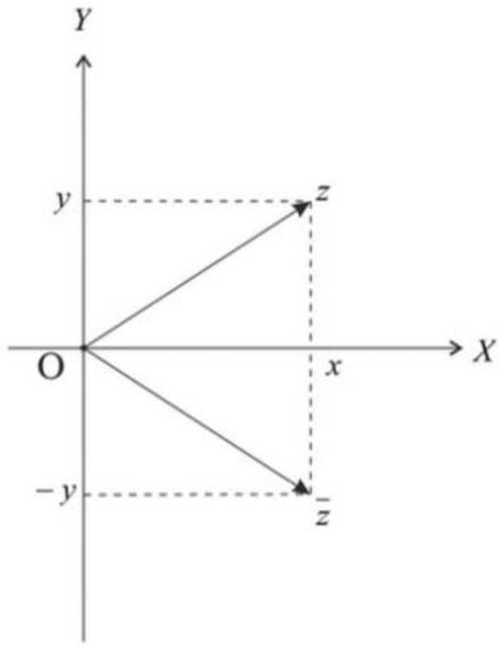
3) $\bar{\bar{z}} = z$;

4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ z_2 \neq 0$;

7) $\overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z})$, мұнда $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ көпмүшелік, $a_0, a_1, ..., a_n$ – нақты сандар.



4-сурет

1-мысал. $z = -\sqrt{3} + 3i$ комплекс санын тригонометриялық және көрсеткіштік түрде жазыңыз.

Шешуі. Берілген комплекс санның модулі мен аргументінің бас мәнін табайық.

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$\arg z = \pi + arctg\left(\frac{3}{-\sqrt{3}}\right) = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Демек,

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Эйлер формуласын ескерсек, $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2-мысал. $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ комплекс санының модулі мен аргументінің бас мәнін табыңыз.

Шешуі. $x = -\cos\frac{\pi}{5} < 0, \quad y = \sin\frac{\pi}{5} > 0$ болғандықтан, аргументінің бас мәні (2.4) формуласымен табылады:

$$\arg z = \pi + arctg\left(-tg\frac{\pi}{5}\right) = \pi - arctg\left(tg\frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}. \qquad |z| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}} = 1.$$

Демек, жауабы: $\arg z = \frac{4\pi}{5}, \ |z| = 1$.

3-мысал. $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha, \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ комплекс санын тригонометриялық және көрсеткіштік түрде жазыңыз.

Шешуі. (2.3) формуласы бойынша

$$|z| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ екенін ескерсек, онда $1 - \cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$, демек, аргументтің бас мәні келесі формуламен есептеледі:

$$\arg z = arctg\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = arctg\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= arctg\left(ctg\frac{\alpha}{2}\right) = arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Олай болса, жауабы: $z = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$ – тригонометриялық түрі,

$z = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$ – көрсеткіштік түрі.

4-мысал. $z = (1-i)^6(1-\sqrt{3}i)^4$ комплекс санының модулі мен аргументінің бас мәнін табыңыз.

Шешуі. *1-әдіс.* $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ және $(1-\sqrt{3}i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}i + 9i^2 - 3\sqrt{3}i =$ $= 1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i = -8$ екенін ескеріп, берілген комплекс санды былай жазуға болады:

$$z = ((1-i)^2)^3\cdot(1-\sqrt{3}i)^3\cdot(1-\sqrt{3}i) = (-2i)^3\cdot(-8)\cdot(1-\sqrt{3}i) = -64i(1-\sqrt{3}i) = -64(\sqrt{3}+i).$$

Соңғы өрнектің модулі мен аргументінің бас мәні оңай есептеледі.

$$|z| = 64\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 64\cdot 2 = 128;$$

$$\arg z = -\pi + arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

2-әдіс. $z_1 = 1 - i$ және $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ комплекс сандарын тригонометриялық түрде жазайық.

$$|z_1| = \sqrt{2},\ \arg z_1 = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$|z_2| = 2,\ \arg z_2 = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Демек $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

(2.7) және (2.11) формулаларын ескерсек,

$$z_1^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right),$$

$$z_2^4 = 2^4\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_1^6 \cdot z_2^4 = 8 \cdot 16\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 128\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 128\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} - 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6} - 2\pi\right)\right) =$$

$$= 128\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Демек, $|z| = 128$, $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$. Жоғарыда біз аргументтің бас мәні $-\pi < \arg z \le \pi$ аралығында жататынын ескердік.

5-мысал. i^n табыңыз, мұнда $n -$ кез келген бүтін сан.

Шешуі. $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$, $i^8 = (i^4)^2 = 1, \ldots$

Бұдан байқайтынымыз:

$i^5 = i^9 = i^{13} = \ldots = i^{4k-3} = i,$

$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4k-2} = -1,$

$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4k-1} = -i,$

$i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots = i^{4k} = 1,$

мұнда $k -$ кез келген бүтін сан.

Демек,

$$i^n = \begin{cases} i, & егер \quad n = 4k-3; \\ -1, & егер \quad n = 4k-2; \\ -i, & егер \quad n = 4k-1; \\ 1, & егер \quad n = 4k. \end{cases}$$

Енді i^{2030}, i^{99}, i^{205} – табайық.

$i^{2030} = i^{2028} \cdot i^2 = (i^4)^{507} \cdot i^2 = -1;$

$i^{99} = i^{96} \cdot i^3 = (i^4)^{24} \cdot i^3 = -i;$

$i^{205} = i^{204} \cdot i = (i^4)^{51} \cdot i = i.$

Жауабы: $i^{2030} = -1$, $i^{99} = -i$, $i^{205} = i.$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.